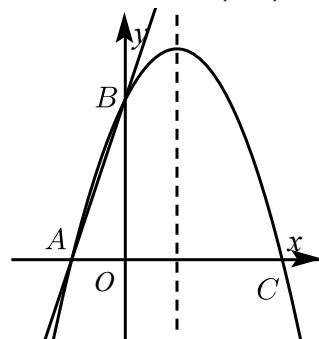


别慌，小场面

1. 如图，直线 $y = 3x + 3$ 交 x 轴于 A 点，交 y 轴于 B 点，过 A 、 B 两点的抛物线交 x 轴于另一点 $C(3, 0)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q ，使 $\triangle ABQ$ 是等腰三角形？若存在，求出符合条件的 Q 点坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) $(1, \sqrt{6})$ 或 $(1, -\sqrt{6})$ 或 $(1, 0)$ 或 $(1, 1)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 直线 $y = 3x + 3$ 交 x 轴于 A 点，当 $y = 0$ 时，解得 $x = -1$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ 。

同理可得 $B(0, 3)$ 。

又 $\because$ 抛物线过 $A(-1, 0)$ ， $B(0, 3)$ 和 $C(3, 0)$ 三点，

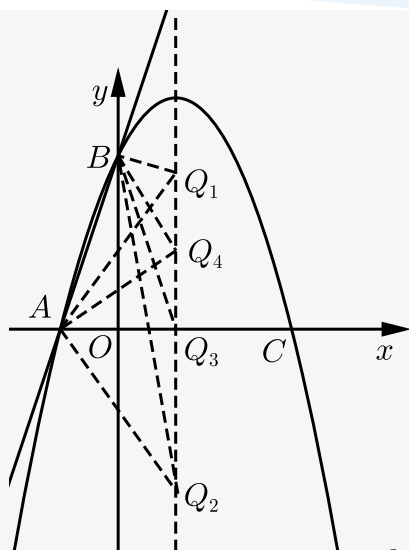
$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-3)$ 。

将 $B(0, 3)$ 代入 $y = a(x+1)(x-3)$ ，得 $-3a = 3$ ，解得 $a = -1$ 。

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) 方法一：在抛物线的对称轴上存在点 Q ，使 $\triangle ABQ$ 是等腰三角形，

如图所示，分四种情况考虑：



抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，由图象可得对称轴 $x = 1$ 交 x 轴于点 Q_3 ，

当 $AB = AQ_1 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ 时，

在 $Rt\triangle AQ_1Q_3$ 中， $AQ_3 = 2$ ， $AQ_1 = \sqrt{10}$ ，

根据勾股定理得： $Q_1Q_3 = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6}$ ，此时 $Q_1(1, \sqrt{6})$ ；

由对称性可得 $Q_2(1, -\sqrt{6})$ ；

当 $AB = BQ_3$ 时，可得 $OQ_3 = OA = 1$ ，此时 $Q_3(1, 0)$ ；

当 $AQ_4 = BQ_4$ 时， Q_4 为线段 AB 垂直平分线与对称轴的交点，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(0, 3)$ ，

$\therefore$ 直线 AB 斜率为 $\frac{0-3}{-1-0} = 3$ ，中点坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ，

$\therefore$ 线段 AB 垂直平分线方程为 $y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})$ ，

令 $x = 1$ ，得到 $y = 1$ ，此时 $Q_4(1, 1)$ ，

综上， Q 的坐标为 $(1, \sqrt{6})$ 或 $(1, -\sqrt{6})$ 或 $(1, 0)$ 或 $(1, 1)$ 。

方法二：存在 $\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ，

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ 。

设 Q 坐标为 $(1, m)$ ，则 $AQ = \sqrt{4 + m^2}$ ， $BQ = \sqrt{1 + (3 - m)^2}$ ，

又 $AB = \sqrt{10}$ ，

① 当 $AB = AQ$ 时， $\sqrt{10} = \sqrt{4 + m^2}$ ，解得 $m = \pm\sqrt{6}$ ，

$\therefore Q$ 点坐标为 $(1, \sqrt{6})$ 或 $(1, -\sqrt{6})$ ；

② 当 $AB = BQ$ 时， $\sqrt{10} = \sqrt{1 + (3 - m)^2}$ ，解得 $m_1 = 0$ ， $m_2 = 6$ ，

$\therefore Q$ 点坐标为 $(1, 0)$ 或 $(1, 6)$ ；

当 Q 点的坐标为 $(1, 6)$ 时， A ， B ， Q 三点共线，需要舍去，所以此时符合条件的点 Q 的坐标为 $(1, 0)$ 。

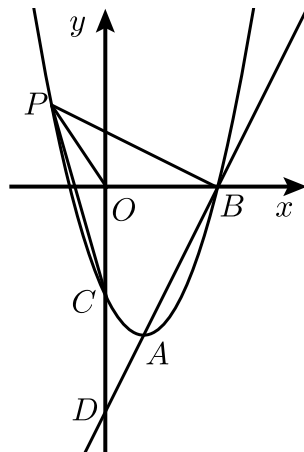
③ 当 $AQ = BQ$ 时， $\sqrt{4 + m^2} = \sqrt{1 + (3 - m)^2}$ ，解得 $m = 1$ 。

$\therefore Q$ 点坐标为 $(1, 1)$.

综上所述, 抛物线的对称轴上存在点 $(1, \sqrt{6})$, $(1, -\sqrt{6})$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, 使 $\triangle ABQ$ 是等腰三角形 .

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合

2. 如图, 已知直线 $y = kx - 6$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 相交于 A, B 两点, 且点 $A(1, -4)$ 为抛物线的顶点, 点 B 在 x 轴上 .



(1) 求抛物线的解析式 .

(2) 若点 Q 是 y 轴上一点, 且 $\triangle ABQ$ 为直角三角形, 求点 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $(0, -\frac{7}{2})$ 或 $(0, \frac{3}{2})$ 或 $(0, -1)$ 或 $(0, -3)$.

【解析】 (1) 把 $A(1, -4)$ 代入 $y = kx - 6$, 得 $k = 2$,

$$\therefore y = 2x - 6 ,$$

$$\text{令 } y = 0 , \text{ 解得 : } x = 3 ,$$

$$\therefore B \text{ 点的坐标是 } (3, 0) .$$

$\therefore A$ 为抛物线的顶点 ,

$$\therefore \text{设抛物线的解析式为 } y = a(x - 1)^2 - 4 ,$$

$$\text{把 } B(3, 0) \text{ 代入得 : } 4a - 4 = 0 ,$$

$$\text{解得 } a = 1 ,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 .$$

(2) 对于直线 $y = kx - 6$, 令 $x = 0$, 得 $y = -6$,

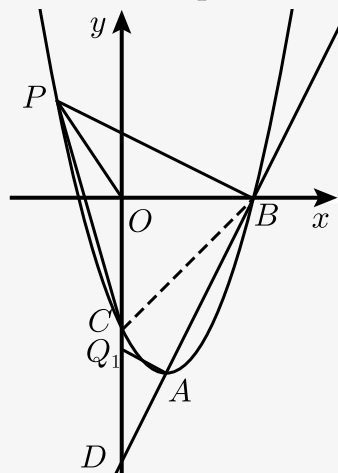
$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (0, -6) ,$$

$$\therefore OD = 6 .$$

又 $\because A(1, -4), B(3, 0)$,

$$\therefore AD = \sqrt{(0-1)^2 + [-6-(-4)]^2} = \sqrt{5}, DB = \sqrt{3^2 + [0-(-6)]^2} = 3\sqrt{5}$$

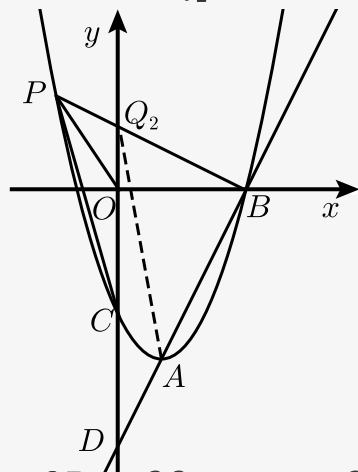
①如图, 当 $\angle Q_1AB = 90^\circ$ 时, $\triangle DAQ_1 \sim \triangle DOB$,



$$\therefore \frac{AD}{OD} = \frac{DQ_1}{DB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{DQ_1}{3\sqrt{5}}, \therefore DQ_1 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OQ_1 = \frac{7}{2}, \text{ 即 } Q_1\left(0, -\frac{7}{2}\right);$$

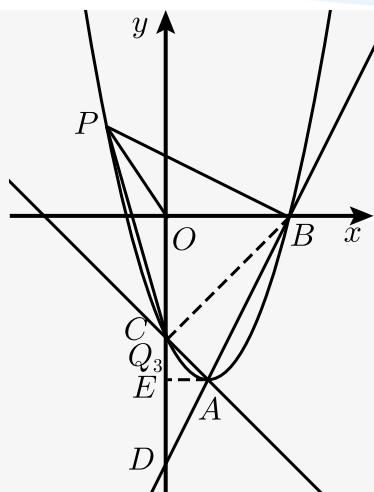
②如图, 当 $\angle Q_2BA = 90^\circ$ 时, $\triangle BOQ_2 \sim \triangle DOB$,



$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{OQ_2}{OB}, \text{ 即 } \frac{3}{6} = \frac{OQ_2}{3},$$

$$\therefore OQ_2 = \frac{3}{2}, \text{ 即 } Q_2\left(0, \frac{3}{2}\right);$$

③如图, 当 $\angle AQ_3B = 90^\circ$ 时, 作 $AE \perp y$ 轴于 E ,



则 $\triangle BOQ_3 \sim \triangle Q_3EA$,

$$\therefore \frac{OB}{Q_3E} = \frac{OQ_3}{AE}, \text{ 即 } \frac{3}{4 - OQ_3} = \frac{OQ_3}{1},$$

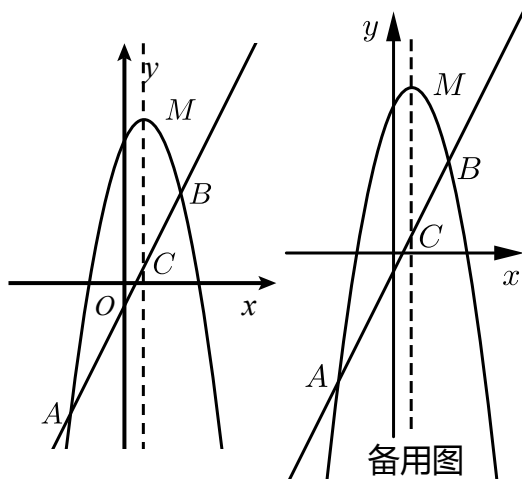
$$\therefore OQ_3^2 - 4OQ_3 + 3 = 0, \therefore OQ_3 = 1 \text{ 或 } 3,$$

即 $Q_3(0, -1)$, $Q_4(0, -3)$.

综上所述, Q 点的坐标为 $(0, -\frac{7}{2})$ 或 $(0, \frac{3}{2})$ 或 $(0, -1)$ 或 $(0, -3)$.

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

3. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点为 $M(1, 9)$, 经过抛物线上的两点 $A(-3, -7)$ 和 $B(3, m)$ 的直线交抛物线的对称轴于点 C .



- (1) 求抛物线的表达式和直线 AB 的表达式.
 (2) 若点 P 在抛物线上, 点 Q 在 x 轴上, 当以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形时, 直接写出满足条件的点 P 的坐标.

【答案】 (1) 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 8$, 直线 AB 的表达式为 $y = 2x - 1$.

(2) 点 $P(6, -16)$ 或 $(-4, -16)$ 或 $(1 + \sqrt{7}, 2)$ 或 $(1 - \sqrt{7}, 2)$.

【解析】(1) 设抛物线的表达式为 $y = a(x-1)^2 + 9$,

将点 A 的坐标代入上式并解得 $a = -1$,

故抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 8$,

则点 $B(3, 5)$,

将点 A 、 B 的坐标代入一次函数表达式 $y = kx + b$,

$$\text{得} \begin{cases} -7 = -3k + b \\ 5 = 3k + b \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -1 \end{cases},$$

所以直线 AB 的表达式为 $y = 2x - 1$.

(2) 设点 $Q(m, 0)$, 点 $P(s, t)$, $t = -s^2 + 2s + 8$,

① 当 AM 是平行四边形的一条边时,

点 M 向左平移 4 个单位、向下平移 16 个单位得到 A ,

同理, 点 $Q(m, 0)$ 向左平移 4 个单位、向下平移 16 个单位为 $(m-4, -16)$, 即为点 P ,

即: $m-4 = s$, $-16 = t$, 而 $t = -s^2 + 2s + 8$,

解得: $s = 6$ 或 -4 ,

故点 $P(6, -16)$ 或 $(-4, -16)$;

② 当 AM 是平行四边形的对角线时,

由中点公式得: $m+s = -2$, $t = 2$, 而 $t = -s^2 + 2s + 8$,

解得: $s = 1 \pm \sqrt{7}$,

故点 $P(1 + \sqrt{7}, 2)$ 或 $(1 - \sqrt{7}, 2)$.

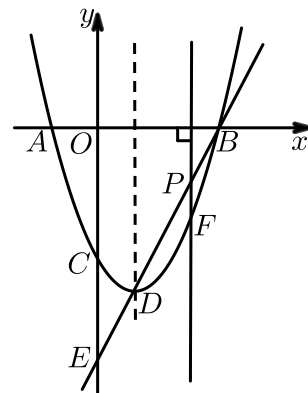
综上, 点 $P(6, -16)$ 或 $(-4, -16)$ 或 $(1 + \sqrt{7}, 2)$ 或 $(1 - \sqrt{7}, 2)$.

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

4. 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .

(1) 求顶点 D 的坐标.

(2) 如图, 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值.



(3) 点 Q 在线段 BD 上, 当 $\angle BDC = \angle QCE$ 时, 求点 Q 的坐标. (直接写出结果, 不必写解答过程).

【答案】 (1) $(1, -4)$.

(2) 1.

(3) $\left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}\right)$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} (-1)^2 - b \times (-1) + c = 0 \\ 3^2 - 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$,

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1, -4)$.

(2) 设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\because B(3, 0), D(1, -4),$$

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ k + b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -6 \end{cases},$$

$$\therefore BD: y = 2x - 6,$$

设 P 点的坐标为 (m, n) ,

$\because$ 点 P 为线段 BD 上一动点, 且不与 B 、 D 重合,

$$\therefore P(m, 2m - 6) (1 < m < 3),$$

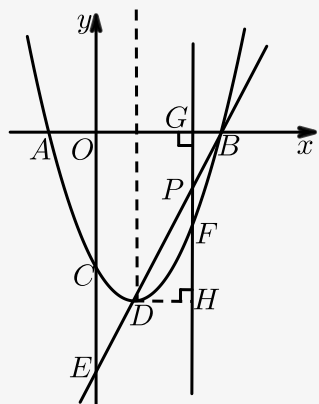
$\because$ 点 F 是过点 P 作 x 轴垂线与抛物线的交点,

$$\therefore F(m, m^2 - 2m - 3),$$

又 $\because$ 点 P 在 F 上方,

$$\therefore PF = 2m - 6 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 4m - 3,$$

设直线 PF 交 x 轴于点 G , 过点 D 作 $DH \perp PF$ 于点 H ,



$$\begin{aligned}
 \because S_{\triangle BDF} &= S_{\triangle PDF} + S_{\triangle PBF} \\
 &= \frac{1}{2} PF \cdot DH + \frac{1}{2} PF \cdot BG \\
 &= \frac{1}{2} PF \cdot (DH + BG) \\
 &= \frac{1}{2} \times (-m^2 + 4m - 3) \times (3 - 1) \\
 &= -m^2 + 4m - 3 \\
 &= -(m - 2)^2 + 1.
 \end{aligned}$$

$\therefore S_{\triangle BDF}$ 是关于 m 的二次函数，

$$\because a = -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时， $\triangle BDF$ 面积取最大值，最大值为 1。

(3) 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}\right)$ ，连接 BC 、 CD ，

$$B(3, 0), C(0, -3), D(1, -4),$$

$$\text{根据勾股定理可得 } BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$$

$$CD^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$BD^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

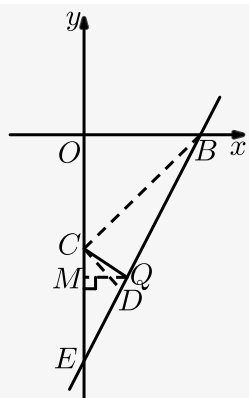
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle QCE,$$

$$\therefore \tan \angle QCE = 3,$$

设点 Q 的坐标为 $(n, 2n - 6)$ ，

过点 Q 作 $QM \perp CE$ 于点 M ，



在 $\text{Rt}\triangle CMQ$ 中，

$$\tan \angle MCQ = \frac{QM}{MC} = \frac{n}{3-2n} = 3,$$

解得 $n = \frac{9}{7}$ ，

$$\therefore 2n - 6 = -\frac{24}{7},$$

$\therefore$ 点 Q 坐标为 $\left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与动点问题